

DM de mathématiques n°6

Polynômes de Tchebychev – Corrigé

Noté sur 34 points.

On définit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$P_0 = 1 \quad P_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

1) Calculer P_2, P_3, P_4 .

0,75 pt : 0,25 pour P_3 , et 0,5 pour P_4 (rien pour P_2 qui est évident...).

$$P_2 = 2X^2 - 1$$

$$P_3 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$$

$$P_4 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$$

2) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .

5,5 pts :

- **0,5 pt** pour avoir compris qu'il s'agissait d'une récurrence double et l'avoir écrit.
- **0,5 pt** pour la bonne formule de $\deg(P_n)$ et de $\text{cd}(P_n)$.
- **0,5 pt** pour l'initialisation (cas $n = 0$ et $n = 1$).
- **0,5 pt** pour la rédaction de l'hérédité de la récurrence double.
- **3,5 pts** pour l'hérédité.

On note $\text{cd}(P)$ le coefficient dominant de P . Montrons par **récurrence double** sur n que $\deg P_n = n$ et que :

$$\text{cd}(P_n) = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

- Avec $n = 0$, on a $P_0 = 1$ donc $\deg P_0 = 0$ et on a bien $\text{cd}(P_0) = 1$.
Avec $n = 1$, on a $P_1 = X$ donc $\deg P_1 = 1$ et $\text{cd}(P_1) = 1 = 2^{1-1}$.
Ainsi, les propriétés sont vraies aux rangs 0 et 1.
- **Soit** $n \in \mathbb{N}$. **On suppose** les propriétés vraies **aux rangs n et $n + 1$** . **Montrons-les** au rang $n + 2$.
 - Si $n = 0$, on a $P_{0+2} = P_2 = 2X^2 - 1$ donc il est clair que $\deg P_2 = 2$ et que son coefficient dominant est $2^{2-1} = 2$.
 - Si $n \geq 1$, par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe deux polynômes Q_n et R_n tels que :

$$P_n = 2^{n-1}X^n + Q_n \quad \text{avec } \deg Q_n \leq n - 1$$

$$P_{n+1} = 2^n X^{n+1} + R_n \quad \text{avec } \deg R_n \leq n$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= 2XP_{n+1} - P_n \\ &= 2X(2^n X^{n+1} + R_n) - 2^{n-1}X^n - Q \\ &= 2^{n+1}X^{n+2} + 2XR - 2^{n-1}X^n - Q \end{aligned}$$

Or :

- $\deg Q \leq n - 1$ et $\deg(2^{n-1}X^n) = n$
- $\deg(XR) = 1 + \deg R \leq n + 1$.

On en déduit que

$$\deg(2XR - 2^{n-1}X^n - Q) \leq n + 1$$

Ainsi, $\deg P_{n+2} = n + 2$ et le coefficient dominant de P_{n+2} est $2^{n+1} = 2^{(n+2)-1}$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{\deg P_n = n}$ et

$$\text{cd}(P_n) = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$P_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

3 pts :

- **0,5 pt** pour avoir compris qu'il s'agissait d'une récurrence double et l'avoir écrit.
- **0,5 pt** pour la rédaction de l'hérédité de la récurrence double.
- **0,5 pt** pour l'initialisation (cas $n = 0$ et $n = 1$).
- **1,5 pt** pour l'hérédité.

Montrons cette relation par **récurrence double** sur n .

- (... on vérifie la relation avec $n = 0$ et $n = 1$...)
- **Soit** $n \in \mathbb{N}$. **On suppose** la propriété vraie **aux rangs** n et $n + 1$. **Montrons** qu'il en est de même **au rang** $n + 2$. Comme $P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$, on a pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} P_{n+2}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) &= 2\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)P_{n+1}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) - P_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right) \times \frac{1}{2}\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \quad \text{par H.R.} \\ &= \frac{1}{2}\left(z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - z^n - \frac{1}{z^n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}\right) \end{aligned}$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n + 2$.

Finalement, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) En déduire une expression simple de $P_n(\cos \theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

2,5 pts :

- **1 pt** pour avoir pensé à utiliser Euler et ne pas s'être trompé sur la formule.
- **1,5 pt** pour le reste.

$$\begin{aligned}
P_n(\cos \theta) &= P_n \left(\frac{1}{2} \left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left((e^{i\theta})^n + \frac{1}{(e^{i\theta})^n} \right) && \text{par la question précédente} \\
&= \frac{1}{2} (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \\
&= \boxed{\cos(n\theta)}
\end{aligned}$$

5) Montrer que P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation suivante :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

3,25 pts :

- **0,5 pt** pour dire que P_n vérifie bien cette relation par la question précédente.
- **0,75 pt** pour s'être donné un autre polynôme Q_n qui vérifie la relation dans le but de montrer l'unicité.
- **2 pts** pour le reste de la démonstration de l'unicité.

Par la question précédente, P_n vérifie bien la relation voulue. Soit $Q_n \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme qui vérifie cette même relation. Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$P_n(\cos \theta) - Q_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = 0$$

Ainsi, $\cos \theta$ est une racine de $P_n - Q_n$. Comme $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, cela signifie que pour tout $x \in [-1, 1]$, x est une racine de $P_n - Q_n$. Ce polynôme admet donc une infinité de racines. On en conclut que $P_n - Q_n = 0$, donc $P_n = Q_n$.

Il y a donc bien unicité du polynôme vérifiant cette relation.

6) Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

2,5 pts :

- **0,5 pt** pour le cas $n = 0$.
- **1,5 pt** pour la résolution.
- **0,5 pt** pour l'écriture de l'ensemble S .

On sait que

$$\begin{aligned}
&\cos(n\theta) = 0 \\
&\iff \cos(n\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&\iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ou} \quad n\theta \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \\
&\iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]
\end{aligned}$$

- Si $n = 0$, il n'y a pas de solution : $\boxed{S = \emptyset}$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\cos(n\theta) = 0$ équivaut à $\theta \equiv \frac{\pi}{2} \left[\frac{\pi}{n} \right]$. Ainsi,

$$\boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

7) En déduire toutes les racines de P_n , puis donner une factorisation de P_n .

5,5 pts :

- **0,5 pt** pour le cas $n = 0$
- **1 pt** pour avoir dit que si $n \geq 1$, alors $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ est racine de P_n .
- **3 pts** pour avoir justifié qu'on a trouvé n racines distinctes de P_n
- **1 pt** pour la factorisation finale, avec le coefficient dominant.

Si $n = 0$, alors $P_n = 1$ donc P_n n'a pas de racine et sa factorisation est $P_n = 1$. Dans la suite on considère $n \geq 1$.

Par les questions 5) et 6), $\cos \theta$ est racine de P_n si et seulement si $\cos(n\theta) = 0$ donc si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On pose

$$\alpha_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le réel $\cos(\alpha_k)$ est racine de P_n .

(Dans les faits, cela ne signifie pas que P_n admet une infinité de racines, car ces racines ne sont pas toutes distinctes.)

Lorsque k parcourt $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les réels α_k sont distincts et appartiennent à $[0, \pi]$. Comme la fonction cosinus est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, on en déduit que les réels $\cos(\alpha_0), \dots, \cos(\alpha_{n-1})$ sont deux à deux distincts. On a ainsi trouvé n racines distinctes de P_n . Comme $\deg P_n = n$, on a trouvé toutes les racines de P_n .

Enfin, comme P_n a pour coefficient dominant 2^{n-1} , on en conclut que P_n se factorise en :

$$P_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right)$$

8) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(n\theta)$ en fonction de puissances de $\cos \theta$.

4 pts :

- **2 pts** pour avoir mené le calcul avant d'avoir fait disparaître $\operatorname{Re}(i^k)$.
- **2 pts** pour la fin du calcul.

On sait que

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \operatorname{Re} \left((e^{i\theta})^n \right) \\ &= \operatorname{Re} \left((\cos \theta + i \sin \theta)^n \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta) \times (i^k \sin^k \theta) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta) \times \operatorname{Re} \left(i^k \right) \sin^k \theta \end{aligned}$$

Or, pour tout entier k impair, on a $\operatorname{Re}(i^k) = 0$. Par contre si k est pair, on a $\operatorname{Re}(i^k) = \operatorname{Re}((-1)^{k/2}) =$

$(-1)^{k/2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta) \times (-1)^{k/2} \sin^k \theta \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) \times (-1)^p (\sin^2 \theta)^p \\ &= \boxed{\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) \times (-1)^p (1 - \cos^2 \theta)^p}\end{aligned}$$

9) Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} X^{n-2p} (X^2 - 1)^p$$

2 pts

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$Q_n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} X^{n-2p} (X^2 - 1)^p$$

Par la question précédente, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$Q_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) = P_n(\cos \theta)$$

En utilisant la question 5), on en déduit que $P_n = Q_n$. D'où le résultat.

10) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

a) Calculer f_0 , f_1 et f_2 .

1 pt : 0,25 pour f_0 et f_1 ensemble ; 0,75 pour f_2

Soit $x \in [-1, 1]$.

$$f_0(x) = \cos(0 \arccos x) = \cos 0 = \boxed{1}$$

$$f_1(x) = \cos(\arccos x) = \boxed{x}$$

$$\begin{aligned}f_2(x) &= \cos(2 \arccos x) \\ &= 2 \cos^2(\arccos x) - 1 \\ &= \boxed{2x^2 - 1}\end{aligned}$$

b) Exprimer $f_{n+1} + f_{n-1}$ en fonction de f_n .

2 pts

(La question n'a pas de sens si $n = 0$). On suppose $n \geq 1$.

Soit $x \in [-1, 1]$. On pose $A = \arccos x$. On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) &= \cos((n+1)A) + \cos((n-1)A) \\ &= \cos(nA) \cos A - \sin(nA) \sin A + \cos(nA) \cos A + \sin(nA) \sin A \\ &= 2 \cos(nA) \cos A \\ &= \boxed{2xf_n(x)} \end{aligned}$$

Ainsi, $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2xf_n(x)$.

(Ou encore $f_{n+1} + f_{n-1} = 2\text{id}_{[-1,1]} \times f_n$)

c) Pour tout $x \in [-1, 1]$, exprimer $f_n(x)$ comme un polynôme en x .

2 pts

Par la question précédente, pour tout $n \geq 1$, on a $f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) + f_{n-1}(x)$. Par ailleurs, on a aussi $P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) + P_{n-1}(X)$. De plus, on a $f_0(x) = P_0(x)$ et $f_1(x) = P_1(x)$. Par récurrence double immédiate, on montre que pour tout $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(x) = P_n(x)$. Ainsi, par la question 9),

$$f_n(x) = \boxed{\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} x^{n-2p} (x^2 - 1)^p}$$